

Rapport      ZW 1953 - 010  
                 TW 21

Integratie met behulp van karakteristieken van systemen  
van niet-lineaire partiele differentiaalvergelijkingen  
met toelichting aan de hand van een voorbeeld uit de  
hydraulica.

door  
G.W. Veltkamp.

Juni  
1953

Voordracht door de Heer G.W. Veltkamp in de  
serie Actualiteiten op Zaterdag 30 Mei 1953.

Integratie met behulp van karakteristieken van systemen  
van niet-lineaire partiele differentiaalvergelijkingen  
met toelichting aan de hand van een voorbeeld uit de hy-  
draulica.

1. Inleiding.

We beschouwen het volgende stelsel partiele differentiaalvergelijkin-  
gen

$$\left. \begin{aligned} a_{11}u_x + a_{12}v_x + a_{13}u_y + a_{14}v_y &= h_1 \\ a_{21}u_x + a_{22}v_x + a_{23}u_y + a_{24}v_y &= h_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

waarin  $u(x,y)$  en  $v(x,y)$  onbekende functies zijn van de twee onafhankelijk  
variabelen  $x$  en  $y$ ;  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  enz.

De coëfficiënten  $a$  en  $h$  zijn in het algemeen functies van  $x$ ,  $y$ ,  $u$  en  
 $v$ .

We zullen deze vergelijkingen, die een overheersende rol spelen in de  
gasdynamica en in de hydraulica, in hoofdzaak vanuit het standpunt van de  
practicus beschouwen. De belangrijkste (in het algemeen numerieke) op-  
lossingsmethode zal worden aangegeven. Daarnaast zullen aan de hand van  
een voorbeeld uit de hydraulica enkele gevolgen van het niet-lineaire  
karakter van de vergelijkingen (1.1) worden toegelicht.

2. Karakteristieken.

We beschouwen het stelsel (1.1). Noem

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} = A_{ij} \quad \begin{vmatrix} a_{1i} & h_1 \\ a_{2i} & h_2 \end{vmatrix} = H_i \quad i=1, \dots, 4. \quad (2.1)$$

Als  $A_{ij} = 0$  voor alle  $i$  en  $j$ , dan zijn de vergelijkingen (2.1) afhanke-  
lijk; dit geval sluiten we uit. De gevallen  $A_{12} = A_{34} = 0$  en  $A_{13} = A_{24} = 0$   
sluiten we bij de algemene behandeling ook uit. Het blijkt dat in deze  
gevallen of de resultaten van het volgende met geringe wijzigingen geldig  
blijven, of dat het systeem ontaardt. We kunnen dan in het volgende  
zonder beperking aannemen, dat  $A_{12} \neq 0$ ,  $A_{13} \neq 0$ .

Zij nu  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  een oplossing van (1.1). Zij  $K$  een kromme in  
het  $x,y$ -vlak gegeven door  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , met  $\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) \neq 0$ ,  
waarin de stip differentiatie naar  $s$  aanduidt.

Langs  $K$  kunnen ook de waarden van de gegeven oplossing  $u$  en  $v$  als  
functie van  $s$  beschouwd worden:

$$u(s) = u(x(s), y(s)), \quad v(s) = v(x(s), y(s)).$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned} u_x \dot{x} + u_y \dot{y} &= \dot{u} \\ v_x \dot{x} + v_y \dot{y} &= \dot{v} \end{aligned} \quad (2.2)$$

i. t.

(2.1) en (2.2) zijn vier lineaire vergelijkingen voor  $u_x$ ,  $v_x$ ,  $u_y$  en  $v_y$ . De determinant van dit stelsel is

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \dot{x} & 0 & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & 0 & \dot{y} \end{vmatrix} = A_{12} \dot{y}^2 - (A_{14} + A_{32}) \dot{y}\dot{x} + A_{34} \dot{x}^2 \quad (2.3)$$

Als  $\Delta \neq 0$ , dan zijn  $u_x$  enz. langs K bepaald door de waarden van  $u$  en  $v$  langs K.

Interessanter is het als  $\Delta$  wel nul is. Dan is het stelsel alleen compatibel als de rang van de matrix van het inhomogene stelsel gelijk is aan de rang van de matrix van het homogene stelsel. Deze laatste is 3 als  $\Delta = 0$ , want was hij  $< 3$ , dan was zeker  $\dot{x} A_{13} = 0$ , dus  $\dot{x} = 0$ , daar  $A_{13} \neq 0$ . Dan moet echter, daar  $\Delta = 0$  en  $A_{12} \neq 0$ , ook  $\dot{y} = 0$ , in strijd met de aanname  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ .

We vinden dus: als in een punt van K  $\Delta = 0$ , dan moet, daar het stelsel voor een gegeven oplossing  $u$ ,  $v$  zeker compatibel moet blijven

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & h_2 \\ \dot{x} & 0 & \dot{y} & 0 & \dot{u} \\ 0 & \dot{x} & 0 & \dot{y} & \dot{v} \end{pmatrix} = 3,$$

hetgeen, daar  $\dot{x} \neq 0$ , omdat  $A_{12} \neq 0$ , equivalent is met

$$\text{rang} \begin{pmatrix} a_{11}\dot{y} - a_{13}\dot{x} & a_{12}\dot{y} - a_{14}\dot{x} & h_1\dot{x} - a_{11}\dot{u} - a_{12}\dot{v} \\ a_{21}\dot{y} - a_{23}\dot{x} & a_{22}\dot{y} - a_{24}\dot{x} & h_2\dot{x} - a_{21}\dot{u} - a_{22}\dot{v} \end{pmatrix} = 1 \quad (2.4)$$

We beschouwen nu bij de vergelijkingen (2.1) de z.g. karakteristieke vergelijking

$$A_{12}\dot{y}^2 - (A_{14} + A_{32})\dot{x}\dot{y} + A_{34}\dot{x}^2 = 0 \quad (2.5)$$

(de coëfficiënten  $A$  hangen in het algemeen van  $x$ ,  $y$ ,  $u$  en  $v$  af). We nemen nu aan, dat deze vergelijking in ieder punt  $(x, y, u, v)$  twee verschillende reële oplossingen  $\dot{y} : \dot{x}$  heeft en noemen het stelsel (2.1) dan hyperbolisch.

Bij een gegeven oplossing  $(u, v)$  geeft (2.5) in ieder punt  $(x, y)$  dan dus twee verschillende reële richtingen  $\dot{y} : \dot{x}$  (karakteristieke richtingen), waarvoor we kunnen schrijven (daar zeker  $\dot{x} \neq 0$ )

$$dy = \sigma dx$$

$$dy = \tau dx$$

Integreren we deze richtingen tot krommen (karacteristieken) met parameters  $s$  resp.  $t$ , dan geldt dus langs deze krommen

$$y_s = \sigma x_s$$

$$y_t = \tau x_t$$

terwijl uit (2.4) volgt:

$$(A_{11}\sigma - A_{31}) u_s + (A_{12}\sigma - A_{32}) v_s = (H_1\sigma - H_3) x_s$$

$$(A_{11}\tau - A_{31}) u_t + (A_{12}\tau - A_{32}) v_t = (H_1\tau - H_3) x_t$$

(2.6)

Tot dusver hebben we één speciale oplossing van (2.1) beschouwd. Vatten we nu echter het stelsel (2.6) op als vier vergelijkingen voor vier onbekende functies  $x$ ,  $y$ ,  $u$  en  $v$  van  $s$  en  $t$  ( $\sigma$  en  $\tau$  zijn op grond van (2.5) bekend als functies van  $x$ ,  $y$ ,  $u$  en  $v$ ) dan blijkt dus dat bij iedere oplossing van (2.1)  $x$ ,  $y$ ,  $u$  en  $v$  als functies van parameters  $s$  en  $t$  geschreven kunnen worden en dat deze functies voldoen aan het stelsel (2.6).

Omgekeerd kan bewezen worden, dat uit iedere oplossing  $x(s,t), y(s,t), u(s,t), v(s,t)$  van (2.6) door eliminatie van  $s$  en  $t$  een oplossing van (1.1) gevonden wordt, mits  $x_s \neq 0, x_t \neq 0$  ( $x_s = 0$  impliceert  $y_s = 0$ !)

Bewijs:  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = (\tau - \sigma) x_s x_t \neq 0$ , dus  $s$  en  $t$  zijn op te lossen als functies van  $x$  en  $y$ .

Dan is  $u_s = u_x x_s + u_y y_s = (u_x + \sigma u_y) x_s$  etc., dus

$$(\sigma A_{11} - A_{31}) (u_x + \sigma u_y) + (\sigma A_{12} - A_{32}) (v_x + \sigma v_y) = \sigma H_1 - H_3.$$

Met (2.5) en  $A_{11} = 0$  levert dit

$$\sigma(A_{11}u_x + A_{12}v_x + A_{13}u_y + A_{14}v_y - H_1) - (A_{31}u_x + A_{32}v_x + A_{33}u_y + A_{34}v_y - H_3) = 0$$

Dezelfde vergelijking geldt met  $\tau$  i.p.v.  $\sigma$  en daar  $\tau \neq \sigma$  is ook

$$A_{11}u_x + A_{12}v_x + A_{13}u_y + A_{14}v_y - H_1 = 0$$

of

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}u_x + a_{12}v_x + a_{13}u_y + a_{14}v_y - h_1 \\ a_{21} & a_{21}u_x + a_{22}v_x + a_{23}u_y + a_{24}v_y - h_2 \end{vmatrix} = 0$$

en analoog met als eerste kolom  $a_{13}, a_{23}$ .

Daar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{13} \neq 0, \text{ gelden dus ook de vergelijkingen (1.1)}$$

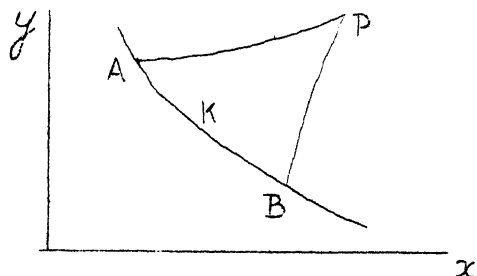
q.e.d.

We hebben nu dus het stelsel (1.1) teruggebracht tot een stelsel (2.6) dat de volgende eigenschappen heeft:

1. in twee der vergelijkingen wordt alleen naar  $s$ , in de andere alleen naar  $t$  gedifferentieerd.
2. de coëfficiënten zijn alleen functies van de afhankelijke variabelen  $x, y, u$  en  $v$ , niet van  $s$  en  $t$ .

## Opmerkingen.

1. Uitgaande van het stelsel (2.6) kan men verschillende existentie-stellingen geven (vgl. Sauer[1], Friedrichs en Lewy[2]). Het resultaat is, dat als langs een kromme  $K$  in het  $x,y$ -vlak  $u$  en  $v$  gegeven zijn, zodanig dat de kromme nergens aan een karakteristieke richting raakt, onder zekere differentieerbaarheidsvoorwaarden de oplossing bestaat en eenduidig bepaald is. Het gedrag van de oplossing in een punt  $P$  hangt



daarbij slechts af van de waarden van  $u$  en  $v$  op het stuk  $AB$  van  $K$ , dat door de karakteristieken door  $P$  uitgesneden wordt (afhankelijkheidsgebied).

2. Essentieel bij het bewijs van de aequivalentie van de systemen (1.1) en (2.6) is dat  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \neq 0$ , hetgeen onder de aannamen  $A_{12} \neq 0$ ,  $A_{13} \neq 0$  en  $\sigma \neq \tau$  neerkomt op  $x_s \neq 0$ ,  $x_t \neq 0$ .

Nu stelt  $x = x(s,t)$ ;  $y = y(s,t)$  een afbeelding voor van het  $s,t$ -vlak op het  $x,y$ -vlak. De krommen  $t = \text{const}$  en  $s = \text{const}$  zijn de karakteristieken-scharen.

$x_s = 0$  (hetgeen impliceert  $y_s = 0$ , daar  $\sigma$  eindig is) wil nu zeggen dat naburige karakteristieken  $s = \text{const}$  elkaar snijden. Is dit langs een kromme in het  $x,y$ -vlak het geval, dan is deze kromme omhullende van de karakteristieken  $s = \text{const}$ .

Verder zullen, daar bijv. 
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(u,y)}{\partial(s,t)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}}$$

de afgeleiden naar  $x$  en  $y$  van  $u$  en  $v$   $\infty$  zijn in punten waar  $x_s$  of  $x_t$  nul zijn.

In de omgeving van dergelijke punten gelden de existentie- en eenduidigheidsbewijzen niet meer. Indien de vergelijkingen (1.1) een fysisch probleem beschrijven, dan zullen we bij het optreden van dergelijke singulariteiten moeten concluderen, dat de mathematische beschrijving hier faalt en op fysische gronden moeten beslissen wat er verder gebeurt. In § 5 zal hiervan een voorbeeld gegeven worden.

3. Het hier geschetste procédé is ook toepasbaar op het geval van  $n$  vergelijkingen met  $n$  afhankelijke variabelen en 2 onafhankelijke variabelen. (Zie Sauer[1], M.Cinquini Cibrario[3], Friedrichs[4]).

De karakteristieke vergelijking (2.5) wordt dan van de  $n^e$  graad - door ieder punt in het  $x,y$ -vlak gaan dan  $n$  karakteristieken. We kunnen nu de parameters van deze karakteristieken niet meer als nieuwe onafhankelijke variabelen opvatten, maar met behulp van een iteratie-procédé lukt het toch existentie stellingen e.d. te bewijzen.

4. Zijn er meer dan 2 onafhankelijke variabelen, dan wordt het probleem veel ingewikkelder - er zijn karakteristieke oppervlakken enz. Zie hiervoor o.a. Courant en Friedrichs[5] en Sauer [1].

## 3. Karakteristieke functies.

Hoewel het systeem (2.6) een zeer geschikt uitgangspunt is voor theoretische en numerieke discussies, kan in een aantal belangrijke gevallen nog een verdere vereenvoudiging door invoering van nieuwe afhankelijke variabelen worden aangebracht.

In het geval van de een-dimensionale gas-stroming werden deze variabelen reeds door Riemann [6] ingevoerd. In het algemene geval kunnen we als volgt te werk gaan (vergelijk ook Schönfeld [7]), die een enigszins andere methode volgt en direct uitgaat van de vergelijkingen (1.1)).

We schrijven de vergelijkingen (2.6) in de volgende vorm

$$\left. \begin{aligned} y_s - c^+ x_s &= 0 \\ y_t - c^- x_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1^+ u_s + A_2^+ v_s &= A_3^+ x_s \\ A_1^- u_t + A_2^- v_t &= A_3^- x_t \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

waarbij

$$\begin{vmatrix} A_1^+ & A_2^+ \\ A_1^- & A_2^- \end{vmatrix} \neq 0 \text{ en } x_s \neq 0, y_s \neq 0. \quad (3.3)$$

Beschouw nu de totale differentiaalvergelijking

$$A_1^+ du + A_2^+ dv = 0, \quad (3.4)$$

waarin we  $u$  en  $v$  als variabelen en  $x$  en  $y$  als parameters beschouwen (de coëfficiënten  $A$  zijn functies van  $x$ ,  $y$ ,  $u$  en  $v$ ). Zij  $\mu^+$  een integrerende factor  $\neq 0$  en  $F^+(u,v; x,y)$  de bijbehorende integraal hiervan (deze bestaat zeker; van de mogelijkheid om bij een gegeven stelsel eenvoudig een integrerende factor te vinden, hangt de praktische bruikbaarheid van de volgende herleiding af).

Beschouwen we nu  $u$  en  $v$ , die functies waren van  $s$  en  $t$ , weer als functies van  $x$  en  $y$  (dit kan, daar de functionaal determinant

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = (c^- - c^+) x_s x_t \neq 0)$$

dan kunnen we ook  $F^+$  als functie van  $x$  en  $y$  beschouwen

$$F^+(u,v; x,y) = f^+(x,y). \quad (3.5)$$

$$\text{Er geldt dan } \frac{\partial f^+}{\partial s} = f_x^+ x_s + f_y^+ y_s = (f_x^+ + c^+ f_y^+) x_s$$

$$\begin{aligned} \text{en } \frac{\partial F^+}{\partial s} &= F_u^+ u_s + F_v^+ v_s + F_x^+ x_s + F_y^+ y_s \\ &= \mu^+ (A_1^+ u_s + A_2^+ v_s) + F_x^+ x_s + F_y^+ y_s = \\ &= (\mu^+ A_3^+ + F_x^+ + c^+ F_y^+) x_s, \end{aligned}$$

waarbij (3.4) en (3.2) gebruikt zijn.

Als dus  $x_s \neq 0$ , dan geldt op grond van (3.5)

$$\mu^+ A_3^+ + F_x^+ + c^+ F_y^+ = 0$$

waarin  $a^+ = \mu^+ F A_3^+ + F_x^+ + c^+ F_y^+$

een bekende functie van  $u, v, x$  en  $y$  is.

Analoog is er een integraal  $F^-(u,v; x,y) = f^-(x,y)$  van  $A_1^- du + A_2^- dv = 0$  bij integrerende factor  $\mu^- \neq 0$ , waarvoor geldt

$$\frac{\partial f^-}{\partial x} + c^- \frac{\partial f^-}{\partial y} = a^- \quad (3.7)$$

met  $a^- = \mu^- A_3^- + F_x^- + c^- F_y^-$ .

Daar nu  $\frac{\partial (F^+, F^-)}{\partial (u,v)} = \mu^+ \mu^- \begin{vmatrix} A_1^+ & A_2^+ \\ A_1^- & A_2^- \end{vmatrix} \neq 0$ ,

kunnen  $u$  en  $v$  als functies van  $F^+, F^-, x$  en  $y$  beschouwd worden en de coëfficiënten  $c^\pm$  en  $a^\pm$  worden dus functies van  $f^\pm, x$  en  $y$ .

$f^+$  en  $f^-$  noemen we karakteristieke functies.

In de plaats van de vier vergelijkingen (2.6) hebben we nu 2 vergelijkingen (3.6) en (3.7), die we aldus kunnen lezen:

langs een  $+$  karakteristiek, waar

$$dy = c^+ dx \quad (3.8)$$

geldt

$$df^+ = \frac{\partial f^+}{\partial x} dx + \frac{\partial f^+}{\partial y} dy = a^+ dx. \quad (3.9)$$

Dat deze vorm zich zeer goed leent voor numerieke berekeningen ligt voor de hand. Zij bijvoorbeeld een beginwaardeprobleem gesteld, waarbij  $u$  en

$v$  (dus ook  $f^+$  en  $f^-$ ) voor  $x = 0$  als functies van  $y$  gegeven zijn.

Vervangen we nu in (3.8) en (3.9) de differentiaal door differenties dan krijgen we (zie fig.)

$$y(Q_1) - y(P_1) = c^+(P_1)(x(Q_1) - x(P_1))$$

$$y(Q_1) - y(P_{i+1}) = c^-(P_{i+1})(x(Q_1) - x(P_{i+1}))$$

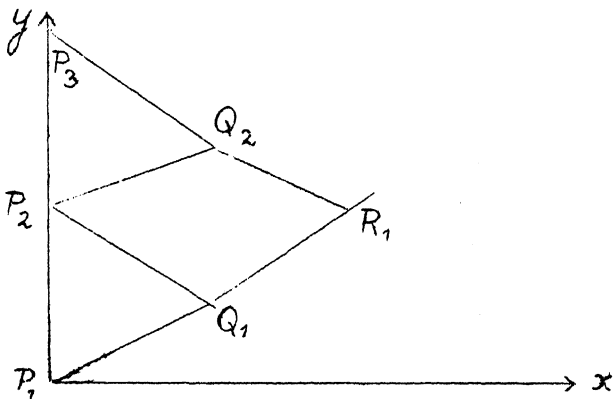
waaruit  $x(Q_1)$  en  $y(Q_1)$  volgen (we nemen aan dat  $P_1$  en  $P_{i+1}$  dicht genoeg bij elkaar zijn, zodat  $c^+(P_1) \neq c^-(P_{i+1})$ ). Uit (4.9) volgt dan:

$$f^+(Q_1) = f^+(P_1) + a^+(P_1)(x(Q_1) - x(P_1))$$

$$f^-(Q_1) = f^-(P_{i+1}) + a^-(P_{i+1})(x(Q_1) - x(P_{i+1})).$$

Hiermee is in de punten  $Q_1$  dus alles bekend en we kunnen nu verder gaan naar de punten  $R_1$ .

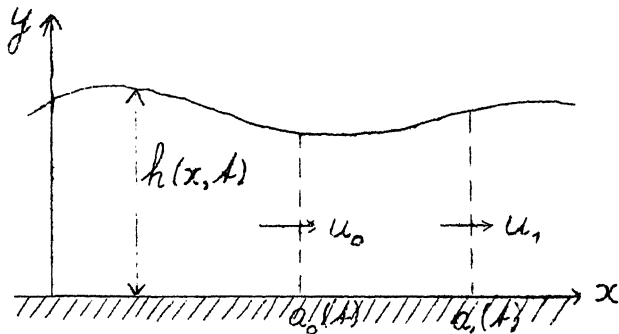
Men kan bewijzen, dat een dergelijk differentieprocédé convergeert, d.w.z. dat de oplossingen van de differentievergelijkingen convergeren naar de oplossing van de differentiaalvergelijkingen, als de maaswijdte van het karakteristieken-net naar nul gaat (vgl. o.a. Sauer [1], Friedrichs [5]).



#### 4. Afleiding van de bewegingsvergelijkingen van de hydrodynamica.

We beschouwen een recht kanaal met verticale evenwijdige wanden en horizontale bodem. De waterbewegingen hierin worden beheerst door de vergelijkingen van Navies-Stokes. Bovendien moeten rand effecten, met name die van de weerstand van de bodem in aanmerking genomen worden. Deze weerstand, die tot wervelingen etc. aanleiding geeft, maakt de mathematische beschrijving zeer ingewikkeld (grenslaagtheorie van von Prandtl).

We zullen hier echter van de in de hydraulica gebruikelijke (vgl. [8]) schematisering uitgaan: We beschouwen de stroming als uniform over het hele profiel en voeren een volume-kracht in die de invloed van de bodemwrijving in rekening brengt. Zij de breedte van het kanaal  $b$  en de hoogte van de



waterspiegel boven de bodem  $h(x,t)$  (de  $x$ -as kiezen we in de lengterichting van het kanaal). We maken nu de volgende aannamen

1. De drukverdeling in het water in verticale richting is hydrostatisch (verticale versnellingen zijn gering).
2. In een verticaal vlak loodrecht op de  $x$ -as is de snelheid uniform.

Met het oog op volgende beschouwingen geven we de bewegingsvergelijkingen nu eerst in integraalvorm. Zij de snelheid in de  $x$ -richting  $u(x,t)$ .

Beschouw twee verticale vlakken  $\perp$  de  $x$ -as door de punten  $a_0(t)$  en  $a_1(t)$  die met de plaatselijke snelheid mee bewegen.

Dus

$$\frac{d}{dt} a_i(t) = u \{ a_i(t), t \} \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

Op grond van aanname 2 is de massa van de vloeistof tussen deze vlakken constant, dus

$$\frac{d}{dt} \int_{a_0}^{a_1} \bar{\rho} \, dx = 0 \quad (4.2)$$

als

$$\bar{\rho}(x,t) = \rho \, b \, h \quad (4.3)$$

de massa per lengte-eenheid in het kanaal is ( $\rho$  is de dichtheid van het water).

Op grond van aanname 1 geldt voor de druk  $p(x,y,t)$  in een punt van de vloeistof

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \, g$$

( $g$  is de versnelling van de zwaartekracht), geïntegreerd

$$p = \rho g (h - y) \quad (4.4)$$

als we overdrukken t.o.v. de atmosferische druk meten.

De drukkracht op een hele verticale doorsnede is dus

$$\bar{p} = \int_0^h \rho \, g \, b (h-y) dy = \frac{1}{2} \rho \, g \, b \, h^2 \quad (4.5)$$



We passen nu de wet van Newton in de x-richting toe op de watermassa tussen  $a_0$  en  $a_1$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{a_0}^{a_1} \bar{\rho} u dx = \bar{p}_0 - \bar{p}_1 - \int_{a_0}^{a_1} \bar{\rho} W dx \quad (4.6)$$

De laatste term rechts is de wrijvingsterm;  $-W$  is de "wrijvingskracht" per massa-eenheid ( $W$  heeft het zelfde teken als  $u$ ).

Uit de integraal wetten (4.2) en (4.6) kunnen we direct differentiaal wetten halen, daar op grond van (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} f(x,t) dt &= f(a_1,t)u(a_1,t) - f(a_0,t)u(a_0,t) + \\ &+ \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Of, na deling door  $a_1 - a_0$  en  $a_1 \rightarrow a_0$ : (bij vaste  $t$ )

$$\lim_{a_1 \rightarrow a_0} \frac{1}{a_1 - a_0} \frac{d}{dt} \int_{a_0}^{a_1} f(x,t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f(x,t)u(x,t) \right\} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}.$$

Dit levert in (4.2) en (4.6) na enige herleiding

$$(\bar{\rho} u)_x + \bar{\rho}_t = 0 \quad (4.9)$$

$$\bar{\rho}(u_t + u u_x) = -\bar{p}_x - \bar{\rho} W \quad (4.10)$$

Volgens (4.3) en (4.5) komt hierbij als verband tussen  $\bar{p}$  en  $\bar{\rho}$ :

$$\bar{p} = \frac{g}{2\bar{\rho}b} \bar{\rho}^2 \quad (4.11)$$

Zien we af van de laatste term van (4.10), dan zijn de vergelijkingen (4.9) t/m (4.11) juist de vergelijkingen voor de 1-dimensionale stroming van een polytroop gas met exponent 2 (voor een polytroop gas geldt algemeen  $p = A\rho^\gamma$ ).

Voeren we de grootte  $c(x,t)$  in door

$$c^2 = \frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} = \frac{2\bar{p}}{\bar{\rho}} = gh \quad (4.12)$$

dan gaan (4.9) en (4.10) over in:

$$\left. \begin{aligned} 2c_t + 2uc_x + cu_x &= 0. \\ u_t + 2cc_x + uu_x &= -W. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$c$  heeft het karakter van een voortplantingssnelheid. Lineariseren we nl. de vergelijkingen (4.13) door de aanname dat  $c - c_0 \ll c_0$ ,  $u \ll c_0$ , dan vinden we, als  $W = 0$

$$\begin{aligned} 2c_t + c_0 u_x &= 0 \\ u_t + 2c_0 c_x &= 0, \end{aligned}$$

dus de golfvergelijking met voortplantingssnelheid  $c_0$ .

In het volgende is het nog nuttig, de energie-wet te beschouwen.

De potentiële energie tussen  $a_0$  en  $a_1$  bedraagt, als we het vlak  $y = 0$  als 0-vlak kiezen:

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{a_1} b \, dx \int_0^h \rho \, g \, y \, dy &= \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{2} \rho \, g \, b \, h^2 \, dx \\ &= \int_{a_0}^{a_1} \bar{p} \, dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nu blijkt met behulp van (4.7) en de bewegingsvergelijkingen (4.9) t/m (4.11)

$$\bar{p}(a_0)u(a_0) - \bar{p}(a_1)u(a_1) - \frac{d}{dt} \int_{a_0}^{a_1} \left( \frac{1}{2} \bar{\rho} u^2 + \bar{p} \right) dx = \int_{a_0}^{a_1} u \bar{\rho} W \, dx \quad (4.15)$$

In woorden:

de door de drukkrachten verrichte arbeid - de toename van kinetische + potentiële energie = energieverlies ten gevolge van de wrijving.

Opgemerkt moet hierbij worden, dat, terwijl bij de opstelling van de integraalwetten (4.2) en (4.6) geen continuïteit of differentieerbaarheid van de functies  $\bar{\rho}$  en  $u$  verondersteld behoefde te worden, bij de afleiding van (4.15) hiervan essentieel gebruik gemaakt is.

#### Opmerkingen:

1. Als we afzien van bodemwrijving en inwendige wrijving (we kunnen dan uitgaan van de vergelijking van Euler), dan blijkt, dat de onderstelling 2 een gevolg is van onderstelling 1. Friedrichs [9] heeft laten zien dat in dit geval de bewegingsvergelijkingen opgevat kunnen worden als vergelijkingen voor de eerste-orde termen van de oplossing van de vergelijkingen van Euler bij ontwikkeling naar de parameter  $\sigma$  = diepte x kromming van het oppervlak op een zeker tijdstip, welke parameter steeds zeer klein is.
2. Voor de weerstand  $W$  als functie van  $u, h$  etc., zijn vele geheel- of half-empirische formules opgesteld (vgl. [8]). Een der bekendste (geldt voor een kanaal met  $b \gg h$ ) is die van Chézy

$$W = g \cdot \frac{|u| u}{C^2 h}$$

waarin  $C$  een constante is.

3. Desgewenst kunnen we aan de bewegingsvergelijkingen ook nog termen voor veranderlijke diepte en breedte, bodemhelling, zijwaartse afvloeiing etc. toevoegen.

#### 5. Karakteristieke integratie van de vergelijkingen (4.13).

##### Enkelvoudige golven.

Passen we de theorie van § 3 en 4 toe op de vergelijkingen (4.13)

dan vinden we direct, dat deze geschreven kunnen worden als

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (u \pm 2c) = -W \quad (5.1).$$

De karakteristieke variabelen zijn dus  $f^\pm = u \pm 2c$ ; de karakteristieke richtingen  $dx : dt = u \pm c$ .

Daar steeds  $c > 0$ , is ons stelsel dus altijd hyperbolisch.

De vergelijkingen (5.1) die weer aldus gelezen kunnen worden:

$$\begin{aligned} &\text{als } dx = (u \pm c)dt \\ &\text{dan is } d(u \pm 2c) = -W dt, \end{aligned}$$

kunnen door numerieke integratie opgelost worden.

We beperken ons nu verder tot het geval  $W = 0$ .

Dan is dus  $f^\pm = u \pm 2c$  constant langs de  $\pm$  karakteristieken.

Noemen we  $c^\pm = u \pm c$  (de helling van de karakteristieken), dan zijn

$$c^+ = \frac{3f^+ + f^-}{4}, \quad c^- = \frac{f^+ + 3f^-}{4} \quad \text{lineaire combinaties van}$$

$f^+$  en  $f^-$ .

We bewijzen nu eenvoudig de volgende:

#### Stelling

Als een zekere karakteristiek recht is, dan ligt deze in een schaar van rechte karakteristieken. Langs deze karakteristieken zijn  $u$  en  $c$  constant.

Bewijs. Langs een rechte  $+$  karakteristiek zijn  $f^+$  en  $c^+$ , dus ook  $f^+$  en  $f^-$ , of  $u$  en  $c$  constant. Dit geldt ook omgekeerd.

Zij  $C_0^+$  een rechte  $+$  karakteristiek, waarlangs dus overal  $f^+$  en  $f^-$  dezelfde waarde hebben ( $f_0^+$ ).

Langs de  $-$  karakteristieken die  $C_0^+$  snijden is  $f^-$  constant, dus gelijk aan  $f_0^-$ . Een  $+$  karakteristiek  $C^+$  op enige afstand van  $C_0^+$  ontmoet overal  $-$  karakteristieken met de waarde  $f^- = f_0^-$  — langs  $C^+$  is dus ook  $f^- = f_0^-$ ; verder is  $f^+ = \text{constant}$ , dus  $C^+$  is recht.

Natuurlijk hoeft langs  $C^+$  niet  $f^+ = f_0^+$ .  $C^+$  hoeft dus ook niet evenwijdig te zijn aan  $C_0^+$ .

De oplossingen van (5.1) waarbij een der scharen karakteristieken rechte lijnen zijn (die dus constante waarden van  $u$  en  $c$  dragen) noemen we enkelvoudige golven. Deze enkelvoudige golven kunnen als volgt ontstaan.

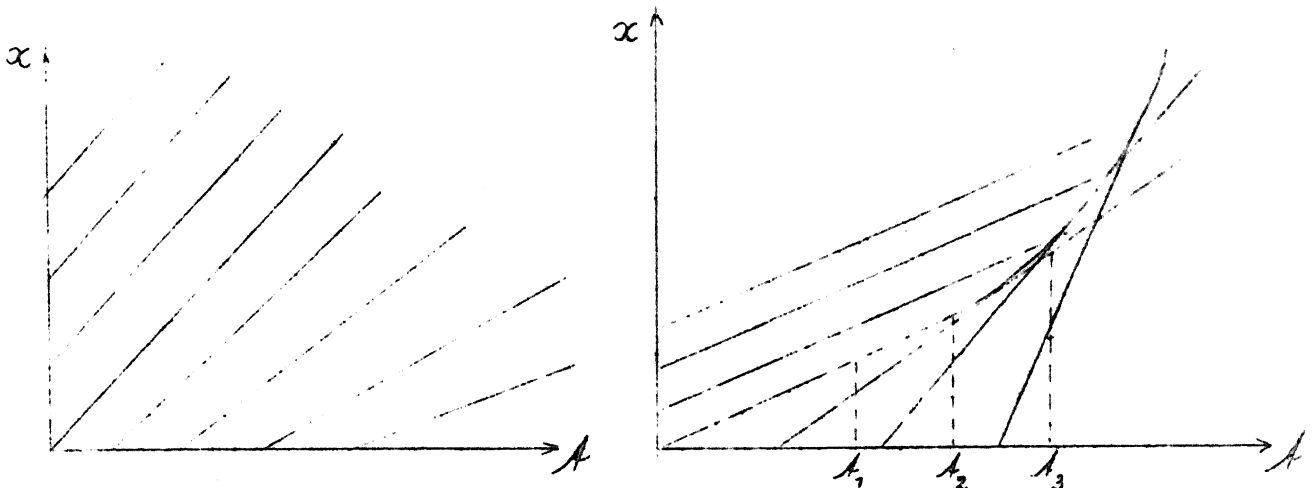
Zij voor  $t = 0$  en  $x \geq 0$   $u = 0$   $c = c_0 (= \sqrt{gh_0})$ .  
en voor  $t > 0$  en  $x = 0$   $u = U(t)$ .

In het gebied van het  $t, x$ -vlak begrensd door de  $x$ -as en de lijn  $x = c_0 t$  is dan  $u = 0$ ,  $c = c_0$ . Onder deze lijn blijven de  $+$  karakteristieken recht en geldt  $f^- = f_0^-$ , of  $u - 2c = -2c_0$ .

Langs de + karakteristieken in dit gebied zijn  $u$  en  $c$  constant, dus  $u = U(t)$ ,  $c = c_0 + \frac{1}{2} U(t)$ . De helling van deze karakteristieken is  $c_0 + \frac{3}{2} U(t)$ . Er geldt dus:

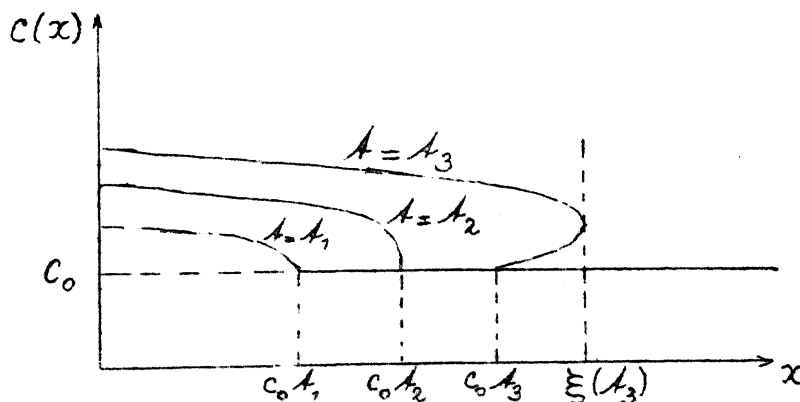
$$\left. \begin{aligned} \text{langs de rechten } x &= (c_0 + \frac{3}{2} U(\tau)) (t - \tau) & t > \tau > 0 \\ \text{is } u &= U(\tau) \\ c &= c_0 + \frac{1}{2} U(\tau). \end{aligned} \right\} (5.2)$$

Hiermee is de beweging overal beschreven, mits zich geen singulariteiten voordoen.



In het geval van de zg. depressie golven, waar  $U(t)$  een monotoon dalende functie is, treden deze niet op, de + karakteristieken snijden elkaar niet en overdekken het hele quadrant enkelvoudig (zie fig.).

Bij compressie golven daarentegen ( $U(t)$  stijgend) zullen de + karakteristieken elkaar ergens snijden en een omhullende hebben (zie fig.). Het gebied tussen deze omhullende en de lijn  $x = c_0 t$  wordt door de karakteristieken 3-voudig overdekt en er kunnen aan een dergelijk punt dus drie waarden voor  $u$  en  $c$  toegekend worden — bv. als in onderstaande figuur. In deze figuur is  $c$  als functie van  $x$  getekend op drie tijdstippen  $t_1$ ,  $t_2$  en  $t_3$ , resp. voor, op en na het moment, waarop de eerste singulariteit optreedt.



Langs de omhullende is  $\frac{\partial x}{\partial \tau} = 0$ , en  $\frac{\partial c}{\partial x}$  wordt hier  $\infty$ , dus we hebben een gebied waar de eenduidigheidsstelling niet geldt ( $\tau$  kan als schaarparameter voor de + karakteristieken opgevat worden. (vgl § 2)).

Hoe moeten we dit verschijnsel fysisch interpreteren?

Het getekende geval kan voor  $t > t_2$  zeker niet fysisch reëel zijn, daar bij de afleiding van de vergelijkingen uitdrukkelijk verondersteld is, dat zich tussen het grensvlak lucht- water en de bodem een ononderbroken vloeistofkolom bevindt..

Het is duidelijk dat er geen continue oplossing is, die aan begin- en randvoorwaarden voldoet. We zullen dus discontinuïteiten moeten toelaten en zullen daartoe eerst de beschouwingen van § 4 uitbreiden.

## 6. Shock-relaties.

We gaan uit van de integraalwetten (4.2) en (4.6) (vgl. Stoker [10]) en veronderstellen dat in het punt  $x = \xi(t)$  ( $a_0 < \xi < a_1$ )  $\bar{\rho}$  (dus  $h$ )  $\bar{p}$  en  $u$  discontinu zijn.

Analoog aan (4.7) geldt nu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a_0(t)}^{a_1(t)} f(x,t) dx &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_{a_0(t)}^{\xi(t)} f(x,t) dx + \int_{\xi(t)}^{a_1(t)} f(x,t) dx \right\} = \\ &= \dot{\xi}(t) f(\xi - 0, t) - u(a_0, t) f(a_0, t) + u(a_1, t) f(a_1, t) - \dot{\xi}(t) f(\xi + 0, t) + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx \end{aligned} \quad (6.1)$$

Laten we  $a_1 \rightarrow a_0$  gaan, waarbij  $a_0 < \xi < a_1$  blijft, dan krijgen we, als  $\frac{\partial f}{\partial t}$  eindig blijft in de omgeving van  $\xi$ :

$$\lim_{a_1 \rightarrow a_0} \frac{d}{dt} \int_{a_0}^{a_1} f(x,t) dx = v_1 f_1 - v_0 f_0, \quad (6.2)$$

als  $f_1 = f(\xi + 0, t)$  etc,

$$\text{waarin } v_0 = u_0 - \dot{\xi}, \quad v_1 = u_1 - \dot{\xi} \quad (6.3)$$

de relatieve snelheden links en rechts t.o.v. de discontinuïteit zijn.

Eisen we nu dat de integraalwetten (4.2) en (4.6) (massa-behoud en impuls-behoud) blijven gelden bij de discontinuïteit en dat  $W$  en de afgeleiden naar  $t$  eindig blijven bij  $x = \xi$ , dan vinden we met (6.2):

$$v_1 \bar{\rho}_1 = v_0 \bar{\rho}_0 = m \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} p_0 - p_1 &= v_1 u_1 \bar{\rho}_1 - v_0 u_0 \bar{\rho}_0 \\ &= m(v_1 - v_0) \end{aligned} \quad (6.5)$$

daar  $u_1 - u_0 = v_1 - v_0$ .

$m$  is de massa die per tijdseenheid door het discontinuïteitsvlak stroomt. Vervolgens bezien we de energie-wet (4.15).

Laten we ook hierin  $a_1 \rightarrow a_0$  gaan, dan gaat het rechterlid naar 0 en voor het linkerlid vinden we

$$\mathcal{G} = \bar{p}_0 u_0 - \bar{p}_1 u_1 - v_1 \left( \frac{1}{2} \bar{\rho}_1 u_1^2 + \bar{p}_1 \right) + v_0 \left( \frac{1}{2} \bar{\rho}_0 u_0^2 + \bar{p}_0 \right).$$

Met (6.4), (6.5) en (4.11) kunnen we dit herleiden tot:

$$\mathcal{Y} = -\frac{m}{2} \frac{(v_1 - v_0)^3}{v_1 + v_0}. \quad (6.6).$$

Hieruit blijkt, dat als er een discontinuïteit optreedt,  $\mathcal{Y}$  altijd  $\neq 0$  is ( $\mathcal{Y} = 0$  levert met (6.4) en (6.5) dat  $\bar{\rho}$  en  $u$  continu zijn).

Nu stelt  $\mathcal{Y}$  voor: de door de drukkrachten verrichte arbeid — de toename van kinetische + potentiële energie per tijdseenheid voor de limiet  $a_1 \rightarrow a_0$ . Of anders  $\mathcal{Y}$  is de in het discontinuïteitsvlak gedissipeerde energie. Het blijkt dus dat deze bij het optreden van een discontinuïteit niet nul kan zijn. Op grond van de energie-wet eisen we nu:

$$\mathcal{Y} \geq 0 \quad (6.7)$$

waarbij het gelijktteken dus alleen bij continuïteit vervuld is. De aldus gedissipeerde energie wordt door de sterk wervelende beweging die in de werkelijkheid in de onmiddellijke omgeving van de discontinuïteit optreedt in warmte omgezet, zodat de energie-balans natuurlijk toch behouden blijft (6.7) drukt echter de onomkeerbaarheid van het proces uit.

(6.4) t/m (6.7) noemen we de shock-relaties. We merken op dat alleen de relatieve snelheden t.o.v. het front optreden — in overeenstemming met het galileïsche relativiteits beginsel.

Opmerking. In de gasdynamica, waar geheel analoge verschijnselen optreden is de temperatuur een essentiële optredende parameter, die direct met druk en dichtheid samenhangt. In plaats van (6.7) krijgen we daar een ongelijkheid door de eis dat de entropie in de discontinuïteit niet mag afnemen.

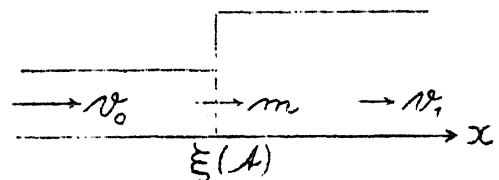
Dat de energie-wet, die in § 4 uit de bewegingsvergelijkingen afgeleid werd, hier niet blijkt te gelden, behoeft geen verwondering: bij de afleiding in § 4 werd uitdrukkelijk van de continuïteit en differentieerbaarheid van  $u$  en  $\bar{\rho}$  gebruik gemaakt.

We leiden nu enkele gevolgen uit (6.4) t/m (6.7) af.

Zonder beperking kunnen we  $m > 0$  veronderstellen.

Dan moet daar  $\bar{\rho} > 0$ , volgens (6.4) en (6.7)

$$\begin{aligned} 0 < v_1 < v_0 \\ \bar{\rho}_0 < \bar{\rho}_1 \end{aligned}$$



In (6.4) en (6.5) voeren we nu de grootheid  $c$  in:

$$c^2 = \frac{2\bar{p}}{\bar{\rho}} = \frac{g}{\rho} \bar{\rho}$$

Dit levert na enig rekenen

$$\begin{cases} c_0^2 + c_1^2 = 2v_0 v_1. \\ c_0^2 v_0 = c_1^2 v_1 \end{cases} \quad (6.8)$$

of

$$c_0^2 = \frac{2v_0 v_1^2}{v_0 + v_1}, \quad c_1^2 = \frac{2v_0^2 v_1}{v_0 + v_1}. \quad (6.9)$$

Hieruit volgt:

Noemen we de 0-zijde van het discontinuïteitsvlak de frontzijde dan kunnen we op grond van het bovenstaande de volgende uitspraken doen:

1. van de frontzijde is de diepte het kleinste,
2. de massaflux loopt tegen het front in,
3. aan de frontzijde is de relatieve snelheid superkritisch ( $v_0 > c_0$ ), aan de achterzijde sub-kritisch ( $v_1 < c_1$ )
4. als aan een der zijden van het front de absolute snelheid 0 is, dan beweegt het front in de richting van de kleinste diepte (geen "verdunningsshocks").

Bij een shock treden 5 grootheden op,  $(c_0, c_1, v_0, v_1, \xi)$ , die de toestand geheel bepalen. Hiertussen kennen we twee relaties en een ongelijkheid. Kennen we dus 3 grootheden, dan kunnen we de beide andere berekenen (de ongelijkheid kan dienen om bij het optreden van meerdere oplossingen de goede te kiezen).

We beschouwen nu de ligging van de karakteristieken ten opzichte van de discontinuïteitslijn  $x = \xi(t)$  in het  $x, t$ -vlak.

Uit (6.10) volgt:

$$\dot{\xi} = u_0 - v_0 < u_0 - c_0 = c_0^- < c_0^+$$

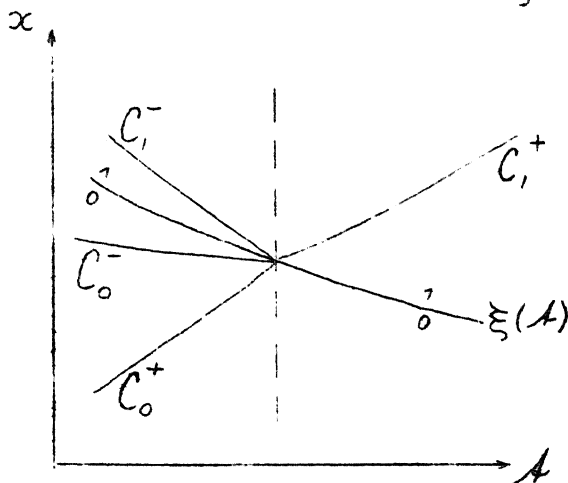
$$\dot{\xi} = u_1 - v_1 > u_1 - c_1 = c_1^-$$

$$\dot{\xi} = u_1 - v_1 < u_1 < u_1 + c_1 < c_1^+.$$

dus

$$c_1^- < \dot{\xi} < c_0^- < c_0^+ \quad (6.11)$$

$$\dot{\xi} < c_1^+ \quad (6.12)$$



Hieruit volgt:

ieder punt van de discontinuïteitslijn wordt gesneden door drie karakteristieken ( $C_0^-$ ,  $C_0^+$ ,  $C_1^-$ ) die "van links" komen en een ( $C_1^+$ ) die "van rechts" komt.

Daar iedere karakteristiek een gegeven - "transporteert" (de grootheden  $f^\pm$ ) beschikken we bij de numerieke integratie dus precies over

voldoende gegevens in de punten van de discontinuïteitslijn. Hier blijkt opnieuw de onomkeerbaarheid van het proces: we kunnen alleen in de richting van positieve  $t$  integreren (als er geen discontinuïteiten zijn, dan is er natuurlijk geen voorkeursrichting voor de integratie).

Het integratie-probleem voor het geval dat de gegeven begintoestand een discontinuïteit bevat is hier mee opgelost. Het geval van § 5, waarbij de discontinuïteit in de loop der integratie optreedt eist iets meer voorzichtigheid: in het eerste punt van de enveloppe zijn  $u$  en  $c$  nog continu en de shock-relaties kunnen dus nog niet gebruikt wrden. We moeten

daarom in de omgeving van dit punt reeksontwikkelingen toepassen naar een parameter die de sterkte van de voorlopig nog zwakke shock beschrijft (vgl. Courant-Friedrichs[5] , pag.156 e.v. en Friedrichs[11]).

Appendix. Volledigheidshalve geven we ook nog de resultaten voor  $m < 0$ :

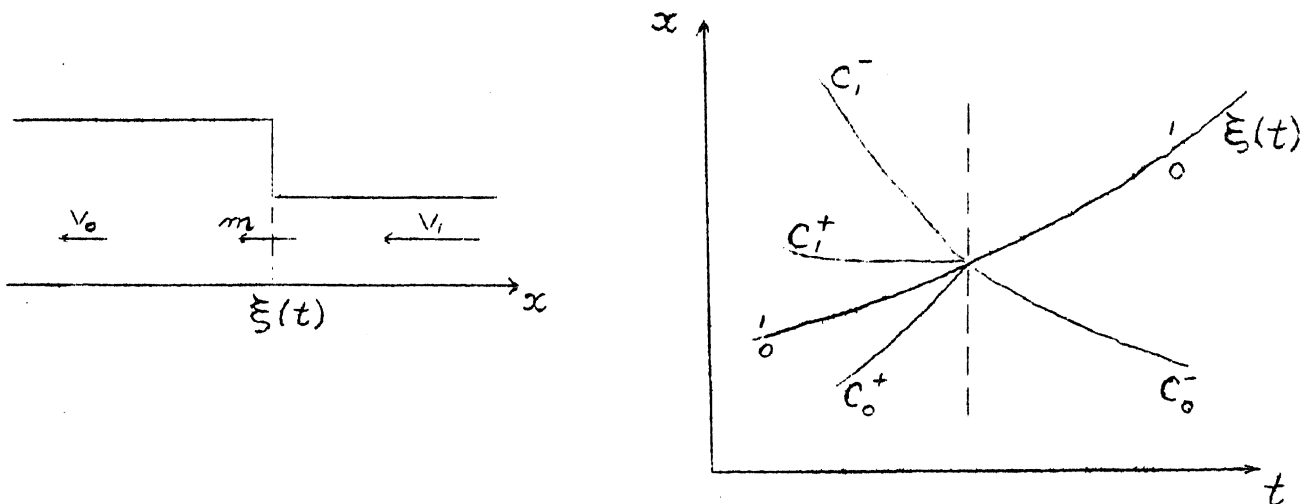
$$\bar{\rho}_1 < \bar{\rho}_0$$

$$v_1 < -c_0 < -c_1 < v_0 < 0 \quad (6.10a)$$

$$c_1^- < c_1^+ < \xi < c_0^+ \quad (6.11a)$$

$$c_0^- < \xi \quad (6.12a)$$

waarbij de volgende plaatjes behoren:



## 7. Zwakke shocks.

We beschouwen nu het geval, dat de discontinuïteiten klein zijn, hetgeen we uit kunnen drukken door de eis dat  $|c_1 - c_0| \ll c_0$  of  $c_1$ , en we stellen:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= c (1 - \gamma) \\ c_1 &= c (1 + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

waarin dus  $|\gamma| \ll 1$ .

Uit de shock-relaties (6.8) en (6.10), resp. (6.10a) vinden we algemeen:

$$v_0 = \operatorname{sgn}(c_1 - c_0) \cdot \frac{c_1}{c_0} \sqrt{\frac{c_0^2 + c_1^2}{2}}$$

$$v_1 = \operatorname{sgn}(c_1 - c_0) \frac{c_0}{c_1} \sqrt{\frac{c_0^2 + c_1^2}{2}},$$

hetgeen met (7.1) levert:

$$v_0 = -c \operatorname{sgn} \gamma \cdot \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \sqrt{1+\gamma^2} =$$

$$= c \operatorname{sgn} \gamma \left\{ 1 + 2\gamma + \frac{5}{2}\gamma^2 + 2\gamma^3 + \dots \right\}$$

$$v_1 = c_1 \operatorname{sgn} \gamma \left\{ 1 - 2\gamma + \frac{5}{2}\gamma^2 - 2\gamma^3 + \dots \right\} \quad (7.2)$$

Uit (6.6) zien we dat de grootheid I, die de energie-dissipatie representeert in dit geval klein is van de derde orde.

Om de ligging van de discontinuïteitskromme t.o.v. de karakteristie-



$$\xi = \frac{u_0+u_1-v_0-v_1}{2} = \frac{u_0+u_1-(c_0+c_1)\operatorname{sgn} \gamma}{2} + c \operatorname{sgn} \gamma \cdot \left(\frac{5}{2}\gamma^2 + \dots\right)$$

Als nu  $\gamma > 0$  (dus  $c_1 > c_0$  of  $m > 0$ ), dan volgt uit (7.1), (7.2) en de definities van  $c^\pm$ ,  $f^\pm$  (pag.10) direct:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{c_0^- + c_1^-}{2} - c \left(\frac{5}{2}\gamma^2 + \dots\right) \\ f_0^+ - f_1^+ &= 2c (\dots 2\gamma^3 + \dots) \\ f_0^- - f_1^- &= 2c (4\gamma + 2\gamma^3 + \dots) \\ c_0^+ - c_1^+ &= 2c (\gamma + 2\gamma^3 + \dots) \\ c_0^- - c_1^- &= 2c (3\gamma + 2\gamma^3 + \dots) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \xi &= \frac{c_0^- + c_1^-}{2} - c \left(\frac{5}{2}\gamma^2 + \dots\right) \\ f_0^+ - f_1^+ &= 2c (\dots 2\gamma^3 + \dots) \\ f_0^- - f_1^- &= 2c (4\gamma + 2\gamma^3 + \dots) \\ c_0^+ - c_1^+ &= 2c (\gamma + 2\gamma^3 + \dots) \\ c_0^- - c_1^- &= 2c (3\gamma + 2\gamma^3 + \dots) \end{aligned}} \right\} \quad (7.3)$$

En voor  $\gamma < 0$  (dus  $c_0 > c_1$  of  $m < 0$ )

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{c_0^+ + c_1^+}{2} + c \cdot \left(\frac{5}{2}\gamma^2 + \dots\right) \\ f_0^+ - f_1^+ &= 2c (4|\gamma| + 2|\gamma|^3 + \dots) \\ f_0^- - f_1^- &= 2c (\quad + 2|\gamma|^3 + \dots) \\ c_0^+ - c_1^+ &= 2c (3|\gamma| + 2|\gamma|^3 + \dots) \\ c_0^- - c_1^- &= 2c (|\gamma| + 2|\gamma|^3 + \dots) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \xi &= \frac{c_0^+ + c_1^+}{2} + c \cdot \left(\frac{5}{2}\gamma^2 + \dots\right) \\ f_0^+ - f_1^+ &= 2c (4|\gamma| + 2|\gamma|^3 + \dots) \\ f_0^- - f_1^- &= 2c (\quad + 2|\gamma|^3 + \dots) \\ c_0^+ - c_1^+ &= 2c (3|\gamma| + 2|\gamma|^3 + \dots) \\ c_0^- - c_1^- &= 2c (|\gamma| + 2|\gamma|^3 + \dots) \end{aligned}} \right\} \quad (7.3a)$$

We zien hieruit:

- 1<sup>o</sup>. de karakteristieken worden "gebroken" over hoeken die van de orde van  $\gamma$  zijn; de helling van de karakteristieken aan de 0 zijde is altijd het grootst;
- 2<sup>o</sup>. de discontinuïteitslijn  $x = \xi(t)$  is in ieder punt "bisectrix" van twee elkaar in dat punt ontmoetende karakteristieken uit het 0 en 1 gebied (op afwijkingen van de 2de orde na), vergelijk de figuren op pag. 14 en 15 - als  $\gamma \geq 0$ , dan zijn het de  $\mp$  karakteristieken;
- 3<sup>o</sup>. de karakteristieke functie, die behoort bij de "doorgaande" karakteristiek (zie de figuren - als  $\gamma \geq 0$ , dan is dit  $c^\pm$ ) is vrijwel continu (op afwijkingen van de derde orde na).

Uit dit laatste punt volgt een uitbreiding van de stelling uit § 5 (pag. 10):

Indien bij een zwakke shock met  $c_1 > c_0$  (resp.  $c_0 > c_1$ ) de -karakteristieken (res. + karakteristieken) aan één der zijden van de discontinuïteitslijn recht zijn, dan zijn ze dat bij benadering ook aan de andere zijde (op afwijkingen van hogere orde na).

Immers, als de -karakteristieken in zeker gebied recht zijn, dan moet  $f^+$  hier overal dezelfde waarde hebben en daarbij een zwakke shock met  $c_1 > c_0$ ,  $f^+$  slechts een discontinuïteit heeft van hogere orde, geldt dit bij benadering ook aan de andere zijde van de discontinuïteitslijn

Als illustratie van het voorgaande behandelen we nu de ontwikkeling van het shock-front bij de enkelvoudige compressie-golf uit § 5.

We zullen ons hier beperken tot het speciale geval dat  $U(t)$  lineair

is, en stellen  $U(t) = \frac{2}{3} at$ . ( $a > 0$ ). Uit (5.2) volgt dan, dat in het gebied, waar geen singulariteiten optreden geldt:

langs de rechten (+ karakteristieken)

$$x = (c_0 + a\tau)(t - \tau) \quad (\tau > 0) \quad (7.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{is} \quad u &= \frac{2}{3} a \tau \\ c &= c_0 + \frac{1}{3} a \tau \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

$$\text{terwijl voor } x > c_0 t \quad u = 0, c = c_0. \quad (7.6)$$

We zoeken nu de omhullende van de karakteristieken (7.4). Deze worden gegeven door

$$\begin{cases} x = (c_0 + a\tau)(t - \tau) \\ 0 = \frac{d}{d\tau} (c_0 + a\tau)(t - \tau) = at - c_0 - 2a\tau \end{cases}$$

of:

$$\begin{aligned} t &= \frac{c_0}{a} + 2\tau & (\tau > 0) \\ x &= \frac{(c_0 + a\tau)^2}{a} & (\tau > 0) \\ &= \frac{(c_0 + at)^2}{4a} & (t > \frac{c_0}{a}) \end{aligned} \quad (7.7)$$

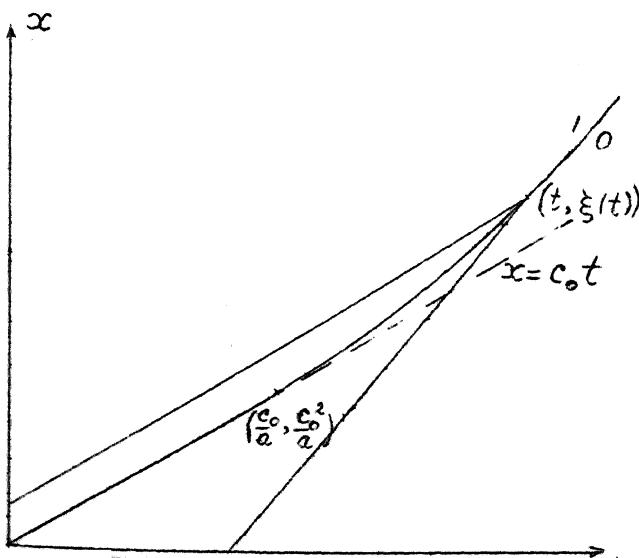
Het "eerste" punt (voor de kleinste waarde van  $t$ ) van de omhullende wordt gegeven door de parameterwaarde  $\tau = 0$  en ligt dus op de + karakteristiek  $x = at$ , die het in rust zijnde gebied scheidt van het gebied waar de beweging reeds begonnen is. (N.b. bij meer algemene functies  $U(t)$  behoeft dit geenszins het geval te zijn). In dit punt is dus  $\frac{\partial c}{\partial x} = \infty$  en hier zal de vorming van de shock-golf moeten beginnen.

Daar we hier ongetwijfeld een shock krijgen met  $c_0 > c_1$  (dus  $m < 0$ ) en deze aanvankelijk zeker zwak zal zijn, volgt uit (6.11.a) (vgl. ook de bijbehorende figuur), dat in het 1-gebied geen karakteristieken van de discontinuïteitslijn uit in de positieve  $t$ -richting vertrekken (anders gezegd: het front beweegt met superkritische snelheid t.o.v. de vloeistof aan de 1-zijde). Hieruit volgt dat hier de rusttoestand

blijft heersen - de +karakteristieken blijven recht met richtingscoëfficiënt  $c_0$ .

Volgens het voorgaande blijven dan ook aan de 0-zijde de +karakteristieken, gegeven door (7.4) bij benadering recht, zolang de shock zwak is.

In een punt  $(t, \xi)$  van de discontinuïteitslijn  $x = \xi(t)$  heeft de  $C^+$  karakteristiek dus de richtingscoëfficiënt  $c_1^+ = c_0$  en de  $C_0^+$  karakteris-



$c_0^+ = c_0 + a\tau$ , waarbij  $t, \xi$  en  $\tau$  voldoen aan

$$\xi = (c_0 + a\tau)(t - \tau). \quad (7.8)$$

Op grond van (7.3a) geldt nu dat bij benadering:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{c_0^+ + c_1^+}{2} = c_0 + \frac{1}{2} a\tau \quad (7.9)$$

Om de discontinuïteitslijn te vinden moeten we nu van het stelsel (7.8) en (7.9) de oplossing zoeken, waarbij voor  $\tau = 0$ ,  $t = \frac{c_0}{a}$ ,

$$\xi = \frac{c_0^2}{a} \quad (7.10)$$

We kunnen dit stelsel oplossen door  $t$  en  $\xi$  als functies van  $\tau$  te beschouwen (op iedere  $C_0^+$  karakteristiek, bepaald door de parameter  $\tau$ , ligt een punt  $(t, \xi)$ ).

Uit (7.8) volgt dan

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -2a\tau - c_0 + at + (c_0 + a\tau)\frac{dt}{d\tau}$$

en uit (7.9) volgt

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\xi}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = (c_0 + \frac{1}{2}a\tau)\frac{dt}{d\tau},$$

zodat we vinden

$$\frac{1}{2} a\tau \frac{dt}{d\tau} + at = c_0 + 2 a\tau$$

De oplossing hiervan, die aan de beginvoorwaarde (7.8) voldoet is

$$t = \frac{c_0}{a} + \frac{4}{3}\tau, \quad (7.11)$$

en met (7.8) volgt dan

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{3a} (c_0 + a\tau)(3c_0 + a\tau) \quad (\tau > 0) \\ &= \frac{1}{16a} (c_0 + 3a\tau)(3c_0 + a\tau) \quad (t > \frac{c_0}{a}) \end{aligned} \quad (7.12)$$

waarmee de discontinuïteitslijn bepaald is. Samen met (7.4), (7.5) en (7.6) is hierdoor de beweging geheel beschreven.

We merken op dat deze onder de omhullende van de  $C_0^+$  karakteristieken verloopt. (Vgl. (7.7)).

Natuurlijk geldt (7.11) alleen, zolang de shock zwak is, d.w.z. zolang het verschil van de  $c$ -waarden aan weerszijden van het front klein is t.o.v. deze waarden, dus volgens (7.5), zolang  $\frac{1}{3} a\tau \ll c_0$ . (Natuurlijk kunnen we door het beschouwen van hogere benaderingen onze resultaten nog verbeteren).

Voor het verdere verloop (waarbij de  $C_0^+$ -karakteristieken niet meer recht blijven) moeten we dan weer het numerieke procédé van § 6 gebruiken.

Literatuur:

1. Sauer R., Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Berlin, 1952.
2. Friedrichs K.O., Lewy H., Das Anfangswertproblem einer beliebigen nicht-linearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebiger Ordnung in zwei Variabelen. Math. Ann., 99, 200, 1928.
3. Cinquini-Cibrario M., Un teorema di esistenza e unicita per un sistema di equazioni alle derivate parziali, Annali di Matematica (4), 24, 157, 1945.
4. Friedrichs K.O., Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables. Am.Journ.Math. 70, 555, 1948.
5. Courant R., Friedrichs K.O., Supersonic Flow and Shock Waves, New York, 1948.
6. Riemann B., Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 8, 43, 1860 of Gesammelte Werke, 2e Auflage, 1892, p.157.
7. Schönfeld J.C., Propagation of tides and similar waves, Proefschrift Delft 1951.
8. Tison L.J., Cours d'Hydraulique, Gand, 1950.
9. Friedrichs K.O., On the derivation of the shallow water theory, Comm.Appl.Math., 1, 81, 1948.
10. Stoker J.J., The formations of breakers and bores, Comm.Appl. Math., 1, 1, 1948.
11. Friedrichs K.O., Formation and decay of shock waves, Comm.Appl. Math. 1, 211, 1948.